文章编号： xxxx-xxxx(XXXX) 0X-00XX-0X

结合径向基函数法和局域质量关系的原子核质量研究

巫鹤鸣[1]，姜慧[†1]，戴程威[1]

（1. 上海海事大学理学院，上海 201306）

摘要： 本文运用径向基函数方法（RBF）优化了 Garvey-Kelson 局域型质量关系（GK）及其推广公式（GKs 和 GK+J）在原子核质量描述和预言中的精度。大量数值实验结果表明：径向基函数方法在重建局域型质量关系的预言偏差时，如果仅利用目标核周围确定距离的参考核进行修正，能够高质量重建偏差函数，显著提高模型的质量预言能力。基于 AME2003、AME2012 和 AME2020 已知核质量数据，本文方法可将三种局域型质量关系预言结果的均方根偏差平均降低 17、16、539 keV。外推情况下对不同局域型质量关系同样具有优化效果。本文给出了 AME2020 后最新实验测得的 19 个原子核 ^{65}Cr、^{68,69}Fe、^{74,75}Ni、^{60}Ga、^{103}Sr、^{80}Zr、^{120}Rh、^{99,133,134}In、^{103}Sn、$^{152-154}$Ce、^{150,153}Yb、^{251}No 的质量过剩预言值，其中有 12 个核素的预言精度优于 AME2020。

关键词： 原子核质量，径向基函数方法，局域质量关系

中图分类号： O571.21 **文献标志码：** A **DOI：**

1 引言

原子核质量是描述原子核性质的一个基本物理量，它在核物理学[1]、天体物理学和宇宙学[2] 中发挥着重要作用。在过去的几十年中，原子核质量的实验测量取得了很大的进展。在最新的国际原子质量评估 (Atomic Mass Evaluation, AME) 数据表 AME2020[3] 中收录的质量已知核素约有 2500 种。天体物理学有关恒星演化和核合成过程的研究需要对一系列复杂的核反应和能量释放过程进行计算，其中涉及数千个远离 β 稳定线的核。但由于实验条件的限制，这些远离稳定区域原子核的质量很多在短期内还无法测量，只能依赖理论预言。因此，寻找更加精确的原子核质量预测模型一直是核结构物理研究的热点之一。

目前针对原子核质量的理论模型有很多，例如有限力程小液滴（the Finite-Range Droplet Model, FRDM）模型[4-5]、Duflo-Zuker（DZ）模型[6]、Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov 理论（HFB）模型[7-9]、改进的 Weizsäcker-Skyrme 质量公式（WS）模型[10] 以及相对论密度泛函理论对质量的描述[11-12] 等。以上理论模型的参数主要通过拟合质量数据得到，并且能够应用到整个核素图，因此人们把这些模型称为全局型质量公式。另外还有考虑局域相互作用和相邻原子核质量之间相关性的局域型质量公式，例如 Audi-Wasptra 外推方法[13-14]、基于质子—中子（p-n）相互作用的 δV_{in-jp} 质量关系[15-18]、Garvey-Kelson 局域质量关系式（GK）[19-21] 及其推广的广义 GK 质量关系 (GKs)[22]、结合 Jänecke 公式和 GK 局域关系的 GK+J 公式[23] 以及同位旋多重态质量方程 (Isobaric Multiplet Mass Equation, IMME)[24] 和镜像核质量公式[25] 等。全局型和局域型质量公式是相辅相成、相互补充的。全局型理论能够反映原子核基态性质的系统变化，在描述和预言远离已知实验数据区域核素的基态物理量方面比较有优势；而局域型公式基于实验数据，强调原子核基态性质的局域化特征，在描述已知实验数据方面比较有优势[26]。

近年来，随着数值计算算法的迭代和算力的提升，机器学习 (Machine Learning) 凭借其强大的高维数据处理和预测能力，已在核物理领域得到广泛的应用，特别是在涉及核结构、核反应以及核物质性质的低能核物理领域[27-36]。机器学习相较于传统物理研究方法，在复杂数据分析、模型预测及拟合和系统建模方面有着更强的优势。它能够从已知实验数据中发现潜在的规律和趋势，在研究核结构、核质量预测、核反应模拟等问题时为研究者提供了一种准确、高效的工具，提高了对多参数问题的处理效率，为复杂核物理问题的解释和预测提供了支持。目前贝叶斯神经网络 (Bayesian Neural Networks, BNN) 已被应用于核质量[28-29]、电荷半径[28] 以及 β 衰变半衰期的研究[30]，Levenberg-Marquardt 神经网络方法[31]、高斯过程[32]、决策树算法[33]、多层感知器 (Multilayer Perceptron, MLP) 算法[34] 和 light Gradient

收稿日期： 2023-xx-xx； **修改日期：** 2024-xx-xx
基金项目： 国家自然科学基金资助项目（11875188）
作者简介： 巫鹤鸣（1998–），男，河南洛阳人，在读硕士研究生，从事原子核物理研究；E-mail: whm_official00@163.com
通信作者： E-mail: huijiang@shmtu.edu.cn

Boosting Machine(LightGBM) 算法[35] 也在核质量领域用于改进全局型质量模型。除此之外，径向基函数法（Radial Basis Function Method, RBF）也被引入到对原子核质量的描述和预言中，这一方法被证明在改进原子核质量的全局型质量模型的理论预言值与实验值之间的吻合度方面非常有效[36]，考虑了原子核奇偶效应系统性偏差的 RBF 改进方法也被随之提出[37-38]。

本文的目的是基于 RBF 方法来改进局域型质量关系的描述和预言能力。目前基于 RBF 方法研究局域型质量关系的工作不多，我们着重研究了 RBF 方法对三种局域型质量关系 GK、GKs、GK+J 预言结果的修正能力，并讨论了经过 RBF 修正后的质量预言模型在最新实验数据[39-51] 上的表现。结果证明了 RBF 对以上三种局域型质量关系有着不错的优化能力。

2　方法与数值细节

径向基函数方法是一种以待测点和样本点之间的距离为自变量的机器学习方法，是通过对径向基函数的加权构造出来的理论模型。该方法的目标是在离散的样本数据点之间外插拟合函数，即通过大量离散的样本数据构建一个近似函数 $S(x)$ 以期望能够进行插值或任意近似。可以将它看作是一个高维空间中的曲线拟合或函数逼近问题，其学习过程等价于在多维空间中寻找一个最佳拟合曲面，而其泛化能力等价于利用这个最佳拟合曲面对输入数据进行插值。径向基函数法的解通常写做如下形式：

$$S(x) = \sum_{i=1}^{m} \phi(\| x - x_i \|) w_i, \tag{1}$$

其中 x 表示待求原子核位置（即目标核），x_i 是参考核位置，w_i 对应参考核 x_i 的权重因子，ϕ 是径向基函数，m 是参考核的个数。定义目标核与参考核之间的“距离”r 采用欧氏范数，即 $r = \| x - x_i \| = \sqrt{(N-N_i)^2 + (Z-Z_i)^2}$，$N$、$Z$ 分别为原子核的中子数、质子数。

设有 m 个参考核 (x_i, d_i)，$d_i = M_i^{\rm expt} - M_i^{\rm th}$ 表示参考核质量实验数据与理论预言值的偏差。RBF 方法的解，即平滑的偏差重构函数 $S(x)$ 在参考核位置应满足 $S(x_i) = d_i$，表示如下

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & \cdots & \phi_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 $\phi_{ij} = \phi(\| x_i - x_j \|)(i,j = 1,2,\ldots,m)$。由公式 (2) 可得权重如下

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & \cdots & \phi_{mm} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}。 \tag{3}$$

一旦计算获得权重 w_i，即可通过公式 (1) 得到 RBF 方法对目标核质量预言偏差的重建。用这个近似值来替代目标核的偏差，即 $S(N,Z) \simeq d(N,Z) = M^{\rm expt}(N,Z) - M^{\rm th}(N,Z)$，则 RBF 预言值

$$M^{\rm RBF}(N,Z) = M^{\rm th}(N,Z) + S(N,Z)。 \tag{4}$$

对于已知核（即目标核具有实验测量的质量数据），其自身与自身的距离 $r = 0$，因此要用剩余的参考核来计算权重。不妨设第 k 个核是目标核，令 $d^{(k)} = (d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}, d_{k+1}, \ldots, d_m)^\top$，$w^{(k)} = (w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}, w_{k+1}, \ldots, w_m)^\top$，即从 m 个质量已知的参考核中把目标核的元素去掉。类似地，径向基函数为

$$\phi^{(k)} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1,k-1} & \phi_{1,k+1} & \cdots & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2,k-1} & \phi_{2,k+1} & \cdots & \phi_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{k-1,1} & \cdots & \phi_{k-1,k-1} & \phi_{k-1,k+1} & \cdots & \phi_{k-1,m} \\ \phi_{k+1,1} & \cdots & \phi_{k+1,k-1} & \phi_{k+1,k+1} & \cdots & \phi_{k+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1} & \cdots & \phi_{m,k-1} & \phi_{m,k+1} & \cdots & \phi_{mm} \end{pmatrix},$$

即从原来的 ϕ 矩阵 ($m \times m$ 维) 中去掉第 k 行和第 k 列。通过 $S(x_k) = \sum_{i=1,i\neq k}^{m} \phi(\| x_k - x_i \|) w_i^{(k)}$，得到目标核质量偏差的重建值，则 $M^{\rm RBF}(x_k) = M^{\rm th}(x_k) + S(x_k)$。

可以看出 RBF 方法的结果通常只与参考核的选择、距离及基函数的定义有关，具有一定的局域特征。本文将所有实验上质量已知的原子核数据都纳入参考核的选择。如果只考虑实验误差小于 100 keV 的参考核，则本文方法可外推预言的原子核数目将大幅下降 (约 13%~52%)，但本文的预言精度不会有明显改进。此外，因为与其他基函数相比，$\phi(r) = r$ 可以更好地重建质量偏差[36]，所以本文采用它作为基函数。

3　结果及分析

本节基于 AME2003[52]、AME2012[53] 和 AME2020[3] 数据集结合 RBF 方法和局域型质量关系 GK、GKs、GK+J 描述和预言原子核质量。

首先研究了 RBF 在已知质量核上的优化能力。通过控制距离 r 来调整参考核的位置，分别讨论了 $1 \leqslant r \leqslant R_{\max}$、$R_{\min} \leqslant r$（$R_{\max}$ 不做限制）和 $r = R$ 三种情况。经过大量数值实验，发现令 $r = R$（即过程中只利用目标

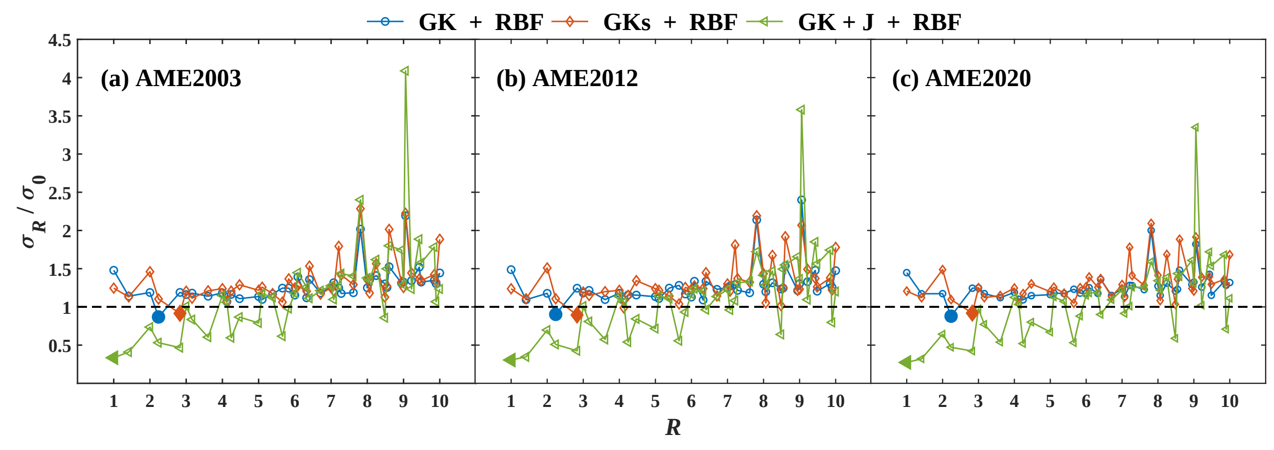


图 1 （在线彩图）三种局域型质量关系比均方根偏差随距离 R 的变化趋势，分别用蓝色、红色和绿色表示。比均方根偏差 $\frac{\sigma_R}{\sigma_0} < 1$ 表明 RBF 方法对模型有优化。由结果可见，对 GK、GKs、GK+J 分别在 $R = \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, 1$ 处达到最优修正，对应标记在图中用实心符号表示。

表 1 基于 AME2003、AME2012、AME2020 已知质量核运用 RBF 方法后，理论预言与实验数据的均方根误差 RMSD(单位：keV)。

Data	GK+RBF			GKs+RBF			GK+J+RBF		
	AME2003	AME2012	AME2020	AME2003	AME2012	AME2020	AME2003	AME2012	AME2020
σ_0	174	140	135	192	182	169	724	764	833
σ_R	151	127	119	176	163	155	243	233	228
$\varDelta$	23	13	16	16	19	14	481	531	605
$\mathcal{N}$	2074	2285	2397	2113	2329	2429	2082	2286	2388

核周围确定距离的参考核质量预言偏差），对于每种局域型质量关系，都可以找到一个特定的距离 R，在此距离下有着最佳 RBF 修正，结果如图 1和表 1所示。图 1和表 1中的结果均基于三种 AME 数据集中 $A \geqslant 16$ 的原子核质量数据。σ_0 表示局域型质量关系预言的均方根偏差，σ_R 为加上确定距离 R 下 RBF 修正的均方根偏差，二者定义如下：

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}}(M_i^{\rm expt} - M_i^{\rm th})^2},$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}}(M_i^{\rm expt} - M_i^{\rm RBF})^2}, \qquad (5)$$

其中 $\mathcal{N}$ 为局域质量关系可给出质量预言的总原子核个数。σ_R 与 σ_0 的比值体现了 RBF 方法对质量预测模型整体的优化能力，当 $\frac{\sigma_R}{\sigma_0} < 1$ 时，说明 RBF 方法对模型的预言在整体上有着明显的优化效果。$\varDelta = \sigma_0 - \sigma_R$ 为经 RBF 修正后均方根偏差的变化量，$\varDelta$ 为正说明 RBF 方法可以显著地提高以上三种局域质量公式的预测能力。可以看到当 $r = \sqrt{5}$ 时，加上 RBF 修正使得 GK 在已知核上的均方根偏差分别降低了 23、13、16 keV（平均 17 keV），即这种优化能力在不同的 AME 数据集上具有稳定性。当 $r = 2\sqrt{2}$ 时，加上 RBF 修正使得 GKs 均方根偏差分别降低了 16、19、14 keV（平均 16 keV）。当 $r = 1$ 时，加上 RBF 修正的 GK+J 可以得到最佳质量预言，均方根偏差分别下降了 481、531、605 keV（平均 539 keV）。值得一提的是，在以上数值计算中 RBF 的修正效果对质量数在 $16 \leqslant A \leqslant 60$ 之间的轻核区域更明显，均方根偏差平均分别降低了 35 keV、57 keV、1558 keV。

图 2展示了上文讨论的距离下，RBF 方法对三种局域型质量关系预言偏差的重建。其中，蓝色实心圆表示通过 RBF 方法得到的重建函数 $S(N, Z)$，灰色方块表示局域型质量关系预言数据和实验数据之间的偏差。由公式 (4) 可知，若 RBF 修正值 S 越接近偏差 d，则 RBF 预言值越接近真实的实验质量。从图中不同色块的重合程度上可以看出，RBF 方法可以高质量地重建局域型关系的质量预言偏差。在 $16 \leqslant A \leqslant 60$ 的轻质量区域，有小部分核素的 RBF 修正与偏差的拟合程度不高，但此区域核素整体上模型的预言偏差较大，因此均方根偏差降低

比较明显（即相应的 Δ 要大一些）。相应地，重核区域核素的 RBF 修正与偏差拟合程度很高，但模型本身的质量预言就很精确，因此在此区域上 RBF 方法的优化效果较不明显。

除了对已知核数据的研究，本文运用 RBF 方法进一步研究了局域型质量关系在未知区域上质量预言的外推能力，具体为三种局域型质量关系从 AME2003 到 AME2012、AME2012 到 AME2020 的外推能力。其中 AME2003 到 AME2012 新增 225 个实验质量数据，AME2012 到 AME2020 新增 129 个，具体结果在表 2和图 3中给出。表 2中 σ_R、σ_0、$\mathcal{N}$ 定义与表 1一致，计算过程中只涉及质量数 $A \geqslant 16$ 的原子核。图 3与图 2类似，显示了 RBF 方法对三种局域型质量关系在外推中预言偏差的重建效果。 从表 2可以看出，RBF 方法在整体上对三种局域型质量关系的外推能力可以起到一定的优化效果。其中，RBF 对 GK+J 的优化效果最好，RBF 修正前

表 2　RBF 对三种局域型质量关系外推的优化能力 (单位：keV)，分别基于 AME2003-AME2012 和 AME2012-AME2020 中实验数据进行计算。

Data	GK+RBF		GKs+RBF		GK+J+RBF	
	03-12	12-20	03-12	12-20	03-12	12-20
σ_0	463	385	522	348	1358	1881
σ_R	433	327	521	387	447	401
Δ	30	58	1	−39	911	1480
$\mathcal{N}$	85	62	126	59	95	66

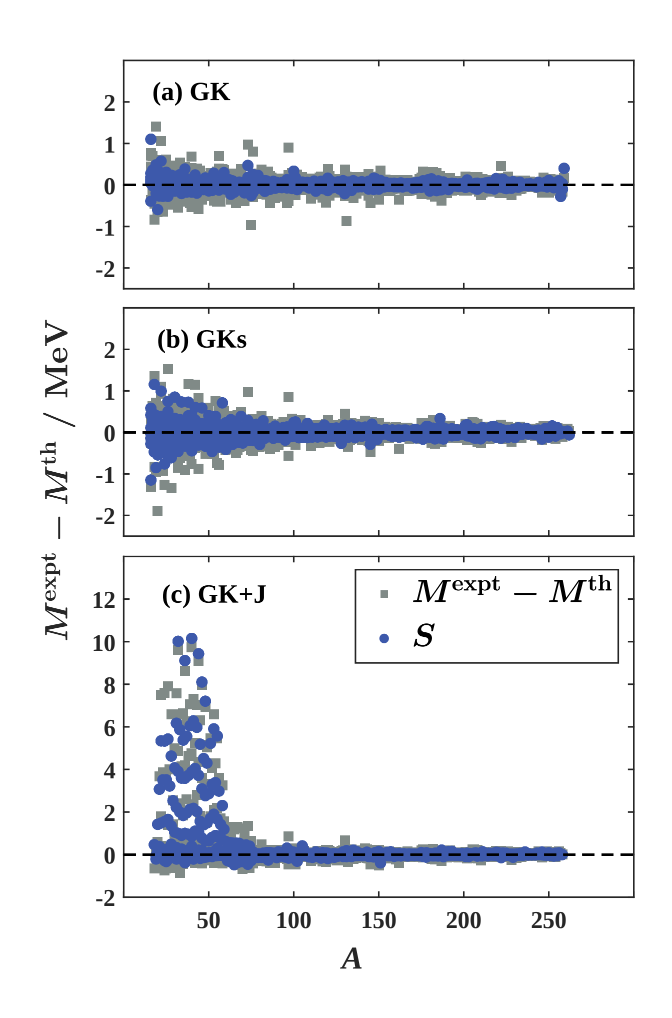


图 2　（在线彩图）三种局域型质量关系已知核预言值与 AME2020 实验数据的偏差 $M^{\rm expt}-M^{\rm th}$ / MeV 及 RBF 重构函数 S / MeV 随质量数 A 的变化。

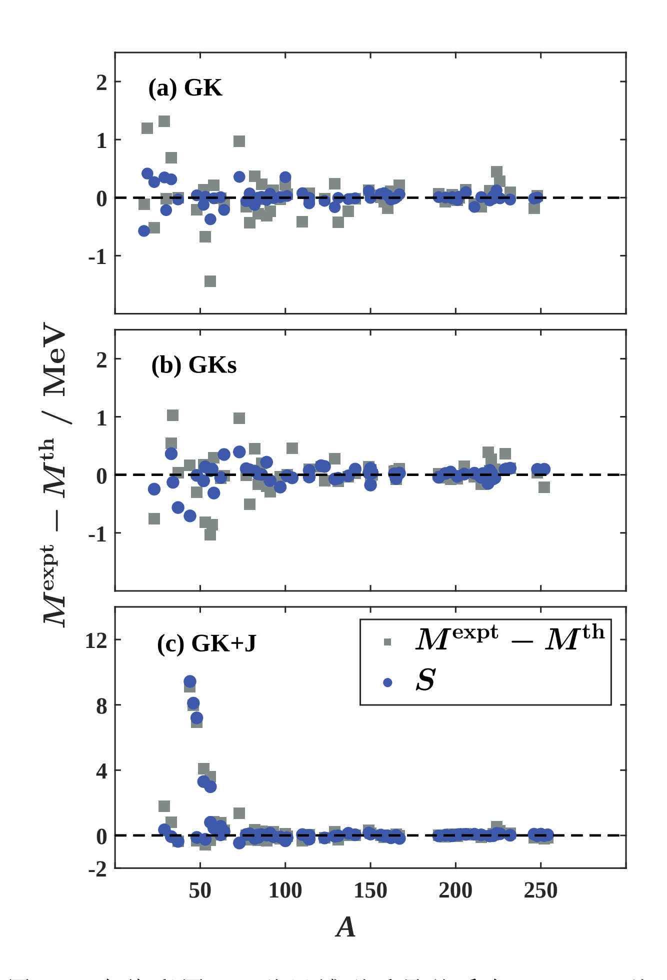


图 3　（在线彩图）三种局域型质量关系在 AM2012 到 AME2020 外推实验中质量预言偏差及 RBF 重构函数 S 随质量数 A 的变化，图例与单位与图 2一致。

后 GK+J 的均方根偏差平均降低了 1196 keV，且图 3(c) 中重建效果的拟合度最高。图 3(a) 与图 3(b) 的重合度接近，但 RBF 对 GK 是正优化，平均使均方根偏差下降了 44 keV。GKs+RBF 的优化效果较不明显，在 AME2012 到 AME2020 的外推中表现不好，这是因为图 3(b) 中重合度虽高，但存在重建值与实际偏差反号的情况，导致 RBF 修正前后均方根偏差反而增大了 39 keV。这表明 GKs 模型的系统偏差与 GK 和 GK+J 不一样，有待进一步的研究。

AME2020 以后，实验上又测得了一百多个原子核的质量过剩数据。三种局域型质量关系由 AME2020 中已知核数据单步外推可以预测出其中的 19 个，分别是 ^{65}Cr、^{68,69}Fe、^{74,75}Ni、^{60}Ga、^{103}Sr、^{80}Zr、^{120}Rh、^{99,133,134}In、^{103}Sn、$^{152-154}$Ce、^{150,153}Yb、^{251}No。本文运用 RBF 方法修正 GK、GKs 和 GK+J，给出了三种局域型质量关系的 RBF 预言值，结果如图 4和表 3所示。图中纵坐标表示模型质量过剩预言值与实验数据之间的偏差，三种局域型质量关系的预言值分别用圆形、菱形、三角形表示，国际原子质量评估数据表 AME2020 中采用的理论预言值用 ∗ 表示，红色星形为实验值。如果某种局域型质量关系无法给出某一个原子核的质量过剩预言值，则在相应原子核的子图中没有该方法对应的符号标记。三种局域型质量关系 RBF 预言值中与实验质量偏差最小的数值称之为“最佳预言数值”，整理于表 3中第 2 列。可以看出，在 19 个最新核素的质量过剩预言中，有 12 个核素的预言精度要优于 AME2020 给出的参考数据，即 ^{68}Fe、^{69}Fe、^{74}Ni、^{75}Ni、^{60}Ga、^{99}In、^{103}Sn、^{152}Ce、^{153}Ce、^{154}Ce、^{150}Yb、^{153}Yb（表 3中核素符号加粗表示）。特别地，^{99}In、^{103}Sn 和 ^{153}Yb 三个核素的质量过剩预言数据在最新实验数据文献给出的误差限中。本文结果对全部 19 个核相较于最新实验数据的均方根偏差为 197 keV，其中预言效果较好的 12 个核的均方根偏差仅有 116 keV，相较于 AME2020 给出的参考值降低了 93 keV。

4 总结与讨论

本文主要研究了径向基函数法对局域型质量关系的优化，以及修正后模型的预言能力。通过大量数值实验，发现 RBF 方法在特定距离下能够显著提高局域质量关系的预测能力。其中对已知核描述的优化是稳定且有效的，使三种局域型质量关系的均方根偏差分别平均降低了 17、16、539 keV。外推情况下的验证结果进一步证明了 RBF 方法的有效性，并且在对最新实验数据的预言中具有竞争力，对 12 个核的均方根偏差相较于 AME2020 降低了 93 keV。

表 3 基于 AME2020 已知数据在最新实验数据集上的质量过剩预言结果 (单位：keV)。ME^{RBF} 为本文主要工作给出的最佳预言数值，第三列选用 AME2020 数据表中采用的理论参考值和误差限，ME^{expt} 为最新实验数据及误差限。

原子核	ME^{RBF}	AME2020*	ME^{expt}
^{65}Cr	−28634	−28310(200)	−28208(45)[39]
^{68}Fe	−44295	−43897(193)	−44101(5.6)[40]
^{69}Fe	−39665	−39199(200)	−39504(11)[40]
^{74}Ni	−48384	−48700(200)	−48451(3.5)[41]
^{75}Ni	−44203	−44240(200)	−44056(14.7)[41]
^{60}Ga	−40193	−39590(200)	−40005(30)[42]
^{103}Sr	−47289	−47280(200)	−47220(29)[43]
^{80}Zr	−54615	−54760(300)	−55128(80)[44]
^{120}Rh	−58722	−58620(200)	−58614(58)[45]
^{99}In	−61419	−61376(298)	−61429(77)[46]
^{133}In	−57579	−57690(200)	−57678(41)[47]
^{134}In	−52138	−51970(200)	−51855(44)[47]
^{103}Sn	−67129	−67092(100)	−67138(68)[48]
^{152}Ce	−58839	−58980(200)	−58878(23)[49]
^{153}Ce	−54594	−54910(200)	−54712(24)[49]
^{154}Ce	−51984	−52220(200)	−52069(24)[49]
^{150}Yb	−38743	−38830(300)	−38635(44)[50]
^{153}Yb	−47141	−47160(200)	−47102(46)[50]
^{251}No	82682	82849(181)	82851(23)[51]

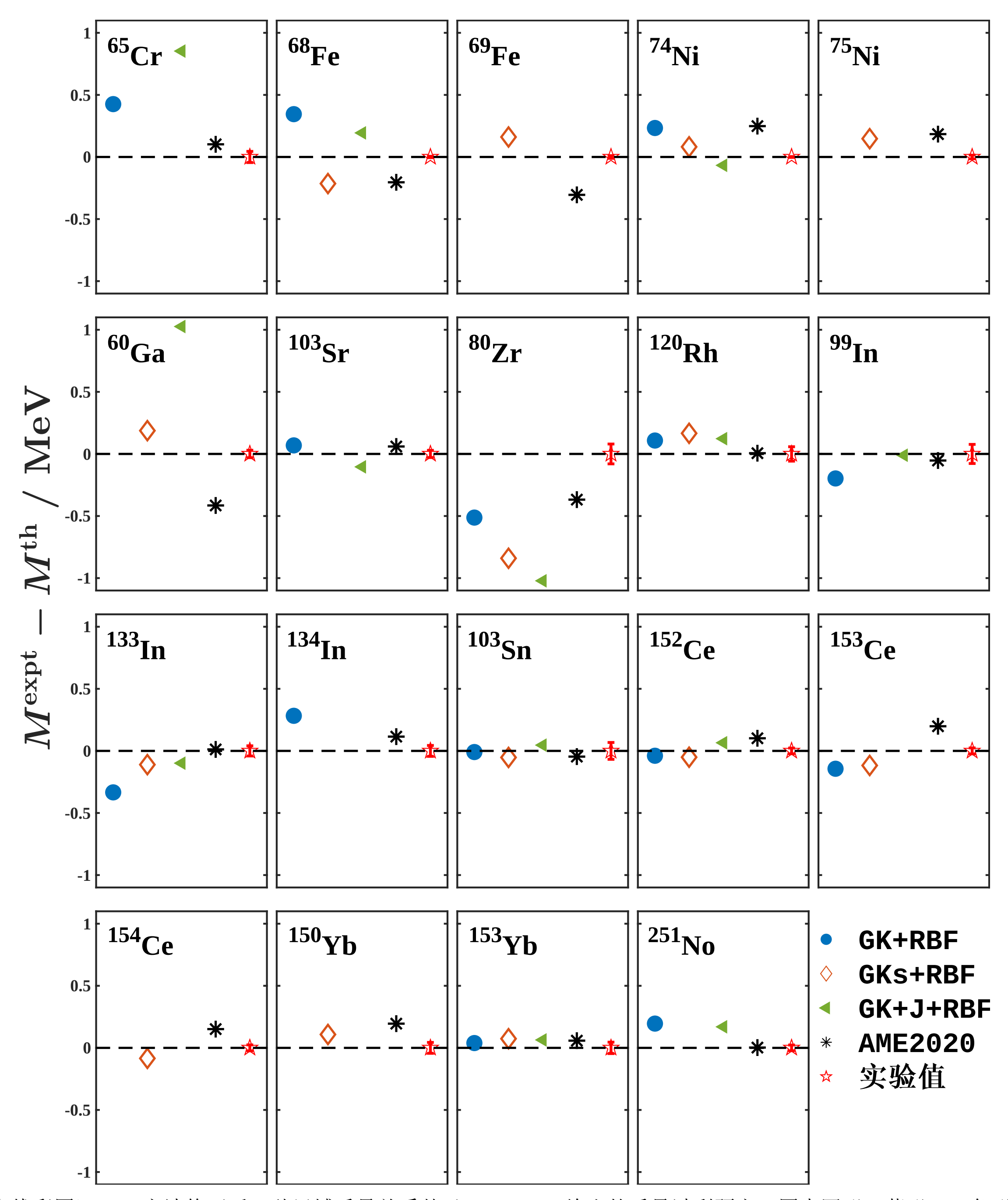


图 4　（在线彩图）RBF 方法修正后三种局域质量关系基于 AME2020 给出的质量过剩预言。图中圆形、菱形、三角形分别为 GK+RBF、GKs+RBF、GK+J+RBF 给出的预言值，∗ 为 AME2020 数据表中采用的理论参考值，红五角星为相关实验文献给出的实验数据。

5 致谢

感谢中国科学院近代物理研究所王猛老师提供近几年质量测量文献目录和有益讨论。感谢上海理工大学鲍曼老师提供 GKs 的质量预言数据。感谢上海交通大学马畅提供 GK+J 质量预言数据。

参考文献

[1] LUNNEY D, PEARSON J M, THIBAULT C. Reviews of Modern Physics, 2003, 75(3): 1021. DOI: 10.1103/RevModPhys.75.1021.
[2] BURBIDGE E M, BURBIDGE G R, FOWLER W A, et al. Reviews of modern physics, 1957, 29(4): 547. DOI: 10.1103/RevModPhys.29.547.
[3] WANG M, HUANG W J, KONDEV F G, et al. Chin Phys C, 2021, 45(3): 030003. DOI: 10.1088/1674-1137/abddaf.
[4] MÖLLER P, MYERS W D, SWIATECKI W J, et al. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 1988, 39(2): 225. DOI: 10.1016/0092-640X(88)90023-X.
[5] MÖLLER P, MYERS W D, SAGAWA H, et al. Phys Rev Lett, 2012, 108(5): 052501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.052501.
[6] DUFLO J, ZUKER A P. Phys Rev C, 1995, 52(1): R23. DOI: 10.1103/PhysRevC.52.R23.
[7] GORIELY S, TONDEUR F, PEARSON J M. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 2001, 77(2): 311. DOI: 10.1006/adnd.2000.0857.
[8] GORIELY S, CHAMEL N, PEARSON J M. Phys Rev C, 2010, 82(3): 035804. DOI: 10.1103/PhysRevC.82.035804.
[9] GENG L S, TOKI H, MENG J. Progress of theoretical physics, 2005, 113(4): 785. DOI: 10.1143/PTP.113.785.
[10] WANG N, LIU M, WU X Z. Phys Rev C, 2010, 81(4): 044322. DOI: 10.1103/PhysRevC.81.044322.
[11] XIA X W, LIM Y, ZHAO P W, et al. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 2018, 121-122: 1. DOI: 10.1016/j.adt.2017.09.001.
[12] ZHANG K Y, CHEOUN M K, CHOI Y B, et al. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 2022, 144: 101488. DOI: 10.1016/j.adt.2022.101488.
[13] AUDI G, WAPSTRA A H. Nuclear Physics A, 1995, 595(4): 409. DOI: 10.1016/0375-9474(95)00445-9.
[14] AUDI G, WAPSTRA A H. Nuclear Physics A, 1993, 565(1): 1. DOI: 10.1016/0375-9474(93)90024-R.
[15] FU G J, JIANG H, ZHAO Y M, et al. Phys Rev C, 2010, 82(3): 034304. DOI: 10.1103/PhysRevC.82.034304.
[16] JIANG H, FU G J, ZHAO Y M, et al. Phys Rev C, 2010, 82(5): 054317. DOI: 10.1103/PhysRevC.82.054317.
[17] FU G J, LEI Y, JIANG H, et al. Phys Rev C, 2011, 84(3): 034311. DOI: 10.1103/PhysRevC.84.034311.
[18] JIANG H, FU G J, SUN B, et al. Phys Rev C, 2012, 85(5): 054303. DOI: 10.1103/PhysRevC.85.054303.
[19] GARVEY G T, KELSON I. Phys Rev Lett, 1966, 16(5): 197. DOI: 10.1103/PhysRevLett.16.197.
[20] GAO Z C, CHEN Y S. Phys Rev C, 1999, 59(2): 735. DOI: 10.1103/PhysRevC.59.735.
[21] BAO M, HE Z, CHENG Y Y, et al. SCIENCE CHINA Physics, Mechanics & Astronomy, 2017, 60(2): 022011. DOI: 10.1007/s11433-016-0406-1.
[22] BAO M, HE Z, LU Y, et al. Phys Rev C, 2013, 88(6): 064325. DOI: 10.1103/PhysRevC.88.064325.
[23] MA C, BAO M, NIU Z M, et al. Phys Rev C, 2020, 101(4): 045204. DOI: 10.1103/PhysRevC.101.045204.
[24] WEINBERG S, TREIMAN S B. Physical Review, 1959, 116(2): 465. DOI: 10.1103/PhysRev.116.465.
[25] BAO M, LU Y, ZHAO Y M, et al. Phys Rev C, 2016, 94(4): 044323. DOI: 10.1103/PhysRevC.94.044323.
[26] BAO Man, JIANG Hui, ZHAO Yumin. Nuclear PhysicsReview, 2023, 40(2):141-180 (in Chinese) DOI: 10.11804/NuclPhysRev.40.2022098
(鲍曼, 姜慧, 赵玉民. 原子核物理评论, 2023, 40(2): 141.)
[27] HE W B, LI Q F, MA Y G, et al. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2023, 66(8): 282001. DOI: 10.1007/s11433-023-2116-0.
[28] UTAMA R, PIEKAREWICZ J, PROSPER H B. Phys Rev C, 2016, 93(1): 014311. DOI: 10.1103/PhysRevC.93.014311.
[29] NIU Z M, LIANG H Z. Phys Lett B, 2018, 778: 48. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.01.002.
[30] NIU Z M, LIANG H Z, SUN B H, et al. Phys Rev C, 2019, 99(6): 064307. DOI: 10.1103/PhysRevC.99.064307.
[31] ZHANG H F, WANG L H, YIN J P, et al. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2017, 44(4): 045110. DOI: 10.1088/1361-6471/aa5d78.
[32] SHELLEY M, PASTORE A. Universe, 2021, 7(5): 131. DOI: 10.3390/universe7050131.
[33] CARNINI M, PASTORE A. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2020, 47(8): 082001. DOI: 10.1088/1361-6471/ab92e3.
[34] YÜKSEL E, SOYDANER D, BAHTIYAR H. International Journal of Modern Physics E, 2021, 30(03): 2150017. DOI: 10.1142/S0218301321500178.
[35] GAO Z P, WANG Y J, LÜ H L, et al. Nuclear Science and Techniques, 2021, 32(10): 109. DOI: 10.1007/s41365-021-00956-1.
[36] WANG N, LIU M. Phys Rev C, 2011, 84(5): 051303. DOI: 10.1103/PhysRevC.84.051303.
[37] NIU Z M, ZHU Z L, NIU Y F, et al. Phys Rev C, 2013, 88(2): 024325. DOI: 10.1103/PhysRevC.88.024325.
[38] NIU Z M, SUN B H, LIANG H Z, et al. Phys Rev C, 2016, 94(5): 054315. DOI: 10.1103/PhysRevC.94.054315.
[39] SILWAL R, ANDREOIU C, ASHRAFKHANI B, et al. Phys Lett B, 2022, 833: 137288. DOI: 10.1016/j.physletb.2022.137288.
[40] PORTER W S, ASHRAFKHANI B, BERGMANN J, et al. Phys Rev C, 2022, 105(4): L041301. DOI: 10.1103/PhysRevC.105.L041301.
[41] GIRAUD S, CANETE L, BASTIN B, et al. Phys Lett B, 2022, 833: 137309. DOI: 10.1016/j.physletb.2022.137309.
[42] PAUL S F, BERGMANN J, CARDONA J D, et al. Phys Rev C, 2021, 104(6): 065803. DOI: 10.1103/PhysRevC.104.065803.
[43] MUKUL I, ANDREOIU C, BERGMANN J, et al. Phys Rev C, 2021, 103(4): 044320. DOI: 10.1103/PhysRevC.103.044320.
[44] HAMAKER A, LEISTENSCHNEIDER E, JAIN R, et al. Nature Physics, 2021, 17(12): 1408. DOI: 10.1038/s41567-021-01395-w.
[45] HUKKANEN M, RYSSENS W, ASCHER P, et al. Phys Rev C, 2023, 107(1): 014306. DOI: 10.1103/PhysRevC.107.014306.
[46] MOUGEOT M, ATANASOV D, KARTHEIN J, et al. Nature Physics, 2021, 17(10): 1099. DOI: 10.1038/s41567-021-01326-9.
[47] IZZO C, BERGMANN J, DIETRICH K A, et al. Phys Rev C, 2021, 103(2): 025811. DOI: 10.1103/PhysRevC.103.025811.

[48] XING Y M, YUAN C X, WANG M, et al. Phys Rev C, 2023, 107(1): 014304. DOI: 10.1103/PhysRevC.107.014304.

[49] ORFORD R, VASSH N, CLARK J A, et al. Phys Rev C, 2022, 105 (5): L052802. DOI: 10.1103/PhysRevC.105.L052802.

[50] BECK S, KOOTTE B, DEDES I, et al. Phys Rev Lett, 2021, 127(11): 112501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.112501.

[51] KALEJA O, ANđELIĆ B, BEZRODNOVA O, et al. Phys Rev C, 2022, 106(5): 054325. DOI: 10.1103/PhysRevC.106.054325.

[52] AUDI G, WAPSTRA A H, THIBAULT C. Nuclear physics A, 2003, 729(1): 337. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2003.11.003.

[53] WANG M, AUDI G, WAPSTRA A H, et al. Chin Phys C, 2012, 36 (12): 1603. DOI: 10.1088/1674-1137/36/12/003.

Study on nuclear mass by combining radial basis function method and local mass relation

WU Heming[1], JIANG Hui[1], DAI Chengwei[1]

(*1. School of Science, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China*)

Abstract: In this paper, the radial basis function method (RBF) is used to optimize the accuracy of Garvey-Kelson local mass relation (GK) and its generalized formula (GKs and GK+J) in the description and prediction of nuclear mass. A large number of numerical experiments show that the RBF can reconstruct the deviation function with high quality and significantly improve the prediction ability of the model if only reference nuclei at a certain distance around the target nucleus are used. Based on the known nuclear mass data of AME2003, AME2012 and AME2020, the root-mean-square deviation of the predicted results of the three local mass relations can be reduced by an average of 17, 16 and 539 keV, respectively. In the case of extrapolation, it also has the optimization effect for local mass relations. At the end of this paper, the mass excess predictions of 19 nuclei measured by the latest experiments after AME2020 are given (^{65}Cr, ^{68,69}Fe, ^{74,75}Ni, ^{60}Ga, ^{103}Sr, ^{80}Zr, ^{120}Rh, ^{99,133,134}In, ^{103}Sn, $^{152-154}$Ce, ^{150,153}Yb, ^{251}No), and the prediction accuracy of 12 nuclei is better than that in AME2020.

Key words: nuclear mass; radial basis function method; local mass relation.

Received date: XX X. 2023; **Revised date:** XX X. 2024

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (11875188);

Corresponding author: JIANG Hui, E-mail: huijiang@shmtu.edu.cn